CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN BỘI

§1. Tích phân kép

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm *f(x,y)* xác định trong miền đóng, bị chặn *D*. Chia miền *D* thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, .., D_n$ có diện tích lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2,.., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh D_i , lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$. Lập tổng (gọi là tổng tích phân của hàm *f(x,y)*)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Gọi $d(D_i)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong D_i. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{\max_i d(D_i)\to 0} S_n = S$$

hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền *D* và cách chọn điểm $M_i(x_i,y_i)$, thì hàm *f(x,y)* gọi là khả tích trên miền *D*, và *S* gọi là tích phân kép của hàm *f(x,y)* trên miền *D*, ký hiệu

$$\iint_D f(x,y)dS$$

Nếu *f(x,y)* khả tích trên miền *D*, thì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền *D*. Do đó, ta chia miền *D* bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Khi đó, $\Delta S_i = \Delta x . \Delta y$ và $dS = dx . dy$

Vì vậy có thể viết

$$\iint f(x,y)dS = \iint f(x,y)dxdy$$

Người ta chứng minh được rằng: Hàm *f(x,y)* liên tục trên một miền đóng, bị chặn *D* thì khả tích trên miền đó.

Tính chất:

a) $\iint_D dS = S(D)$ (diện tích của *D*)

b) $\iint_D C.f(x,y)dS = C.\iint_D f(x,y)dS$

c) $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dS = \iint_D f(x,y)dS + \iint_D g(x,y)dS$

d) Nếu $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \Phi$ thì

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS$$

e) Nếu $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$ thì $\iint_D f(x,y)dS \le \iint_D g(x,y)dS$

f) Nếu m ≤ $f(x,y)$ ≤ M ∀ $(x,y) \in$ D, m và M là hằng số, thì

$$m.S(D) \le \iint_D f(x,y)dS \le M.S(D)$$

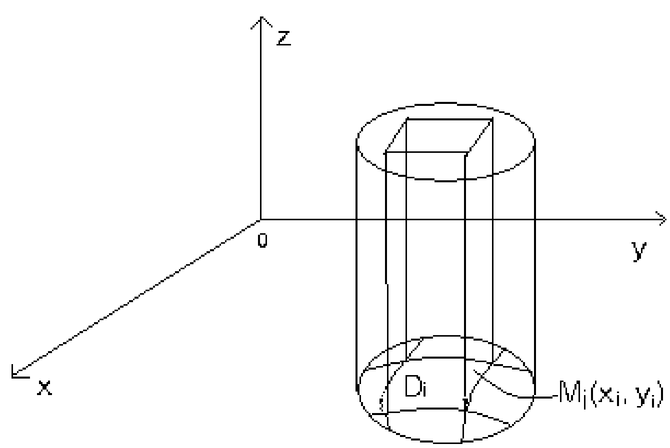
g) Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì tồn tại điểm M(x_0,y_0) sao cho $\iint_D f(x,y)dS = f(x_0,y_0).S(D)$

(Định lý về giá trị trung bình).

Đại lượng $\frac{1}{S(D)}\iint_D f(x,y)dS$ gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x,y)$ trên D.

2. Ý nghĩa hình học

Ta xét bài toán: " Tìm thể tích của vật thể Ω giới hạn dưới bởi miền $D \subset$ (Oxy), giới hạn trên bởi mặt cong có phương trình $z = f(x,y) \ge 0$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với Oz và đường chuẩn là biên của D ".



Ta tính thể tích của Ω bằng phương pháp gần đúng.

Chia miền D thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, .., D_n$ có diện tích ΔS_1, ΔS_2,..,ΔS_n. Lấy mỗi mảnh nhỏ làm đáy, dựng hình trụ con có đường sinh song song với Oz, mặt phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x,y)$.

Xét hình trụ con thứ i: đáy là D_i, Lấy tùy ý 1 điểm $M_i(x_i, y_i)$. ta có thể tích hình trụ con thứ i

$$\Delta V_i \approx f(x_i y_i).\Delta S_i$$

Thể tích gần đúng của Ω :

$$V(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$$

Phép xấp xỉ này càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh D_i có đường kính càng nhỏ ($d(D_i)$: đường kính của D_i)

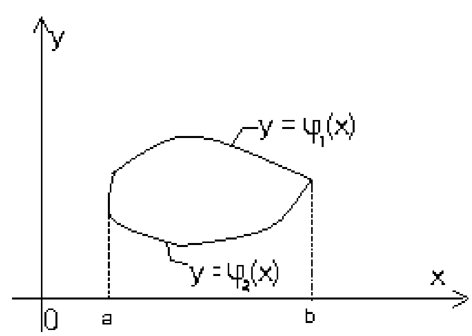
Vậy $$V(\Omega) = \lim_{\max_i d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dS$$

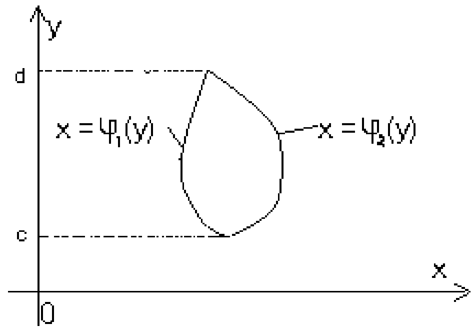
II. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

1. Đưa về tích phân lặp

Nếu $D = \{(x,y): a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$





Nếu $D = \{(x,y) : c \le y \le d; \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ thì $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$

Ví dụ 1: Xác định cận của tích phân $\iint_D f(x,y)dxdy$ với miền *D* xác định bởi các đường

y = 0, y = x, x = 2

y = 0, y = x^2, x + y = 2

Giải:

Có hai cách biểu diễn *D*:

$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2; 0 \le y \le x\}$

hoặc

$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 2; y \le x \le 2\}$

Do đó $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_y^2 f(x,y)dx$

Có 2 cách biểu diễn *D*:

$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2 - y\}$

$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^0 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x^2\} \cup \{(x,y): 1 \le x \le 2; 0 \le y \le 2-x\}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

Ví dụ 2: Tính $I = \iint_D xydxdy$, D giới hạn bởi các đường $y = x - 4$, $y^2 = 2x$

Giải: Hoành độ giao điểm:

$$2x = (x-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Do đó, miền D được biểu diễn

$$D = \left\{(x,y): -2 \le y \le 4; \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4\right\}$$

Vậy

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx = \int_{-2}^{4} \left(y.\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=y+4} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 90$$

2. Đổi biến trong tích phân kép

a. Đổi biến tổng quát

Giả sử $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ là hai hàm có đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng, bị chặn D_{uv}. Gọi $D_{xy} = \{(x,y) / x = x(u,v); y = y(u,v), (u,v) \in D_{uv}\}$

Nếu $f(x,y)$ khả tích trên D_{xy} và định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$$

trên D_{uv} thì ta có

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)).\,|J|\,.dudv$$

-

Ví dụ 3: Tính $\iint_D dxdy$ với *D* giới hạn bởi các đường

$$y = 1 - x, y = 2 - x, y = 2x - 1, y = 2x - 3$$

Giải: Các đường thẳng viết lại $x + y = 1, x + y = 2, 2x - y = 1, 2x - y = 3$

Đặt *u = x + y, v = 2x – y* thì $x = \dfrac{u+v}{3}, y = \dfrac{2u-v}{3}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3}; D_{uv} = \{(u,v) : 1 \le u \le 2; 1 \le v \le 3\}$$

Vậy $\iint_D dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 dv = \frac{2}{3}$

b. Tích phân kép trong tọa ộ cực

Công thức liên hệ tọa độ

x = r.cosφ

y = r.sinφ

Ta có:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Do vậy: $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$

Ví dụ 4: Tính $I = \iint_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, với D giới hạn bởi: $(x-1)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$

Giải:

Rõ ràng $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Thay x = rcosφ , y = rsinφ vào $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ta được r = 2cosφ

Vậy $D_{r\varphi} = \left\{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 2\cos\varphi\right\}$

Do đó:

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)d\varphi = \pi - 2$$

<u>Ví dụ 5:</u> Tính $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ với D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$.

<u>Giải:</u> Chuyển sang hệ tọa độ cực, ta có:

$$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi): 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R\}$$

Do đó:

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} e^{-r^2} rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} rdr = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^R = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

BÀI TẬP

1 -Tính các tích phân kép

a) $\int_0^2 \int_2^3 (4-x^2)dydx$

b) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dxdy$

c) $\int_0^4 \int_0^x x\sin y\, dydx$

d) $\int_0^1 \int_0^{1/y} y e^{xy} dxdy$

2-Tính các tích phân kép

a) $\iint_D (4x+2)dxdy$, D: $0 \le x \le 2$; $x^2 \le y \le 2x$

b) $\iint_D (1-6xy^2)dxdy$, D: $0 \le x \le 2$; $-1 \le y \le 1$

c) $\iint_D y \ln x dxdy$, D: $xy = 1$; $y = \sqrt{x}$; $x = 2$

3- Đổi thứ tự biến lấy tích phân

a) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} f(x,y)dydx$

b) $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} f(x,y)dydx$

c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dxdy$

d) $\int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$

4- Tính các tính phân

d) $\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$, D: $y = \sqrt{1-x^2}$; $y = 0$

e) $\iint_D x dxdy$, D: $y = x$; $x = \sqrt{2-y^2}$; $y = 0$

f) $\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, D: $x^2 + y^2 \le 1$

g) $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$; a, b > 0

h) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, D: $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}; x^2+y^2=\pi^2$

i) $\iint\limits_D (y-x)dxdy$, D: y = x + 1; y = x – 3; $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9}; y=-\frac{1}{3}x+5$

5-Tính diện tích miền D giới hạn bởi

j) D: $y = x^2$; $y = x + 2$

k) D: $y^2 = x$; $y = 2x - x^2$

l) D: $y=2\sqrt{1-x^2}$; $x = \pm 1$; $y = -1$

m) D: $y = 2^x$; $y = -2x$; $y = 4$

§2 Tích phân bội 3

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm số f (x,y,z) xác định trong miền đóng, giới nội Ω của không gian Oxyz.

Chia miền Ω thành n miền nhỏ có thể tích là $\Delta V_1,\dots,\Delta V_n$. Lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i,y_i,z_i)$ trong miền nhỏ thứ i.

Lập tổng

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{\max d_i\to 0} I_n = I$: hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền Ω , và M_i, thì f (x,y,z) gọi là khả tích trên miền Ω , và I gọi là tích phân bội 3 của hàm f trên Ω , ký hiệu

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$$

Tương tự như tích phân kép, ta ký hiệu dxdydz thay cho dV và tích phân bội 3 thường viết

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

Chú ý: Nếu *f* (x,y,z) = 1 thì $\iiint_\Omega dxdydz = V(\Omega)$ (thể tích của Ω).

2. Tính chất

$$\iiint_\Omega Cf(x,y,z)dV = C\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$$

$$\iiint_\Omega (f+g)dV = \iiint_\Omega fdV + \iiint_\Omega gdV$$

- Nếu $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ thì $\iiint_\Omega fdV = \iiint_{\Omega_1} fdV + \iiint_{\Omega_2} fdV$
- Nếu *f* (x,y,z) ≥ g(x,y,z) ∀ (x,y,z) ∈ Ω thì $\iiint_\Omega fdV \ge \iiint_\Omega gdV$
- Nếu *f* (x,y,z) liên tục trong miền đóng, bị chặn Ω thì tồn tại điểm $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$ sao cho

$f(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{1}{V(\Omega)}\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$ (Định lý về giá trị trung bình)

II. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BộI 3

1. Tích phân bội 3 trong hệ tọa ộ Descartes

Cho Ω giới hạn bỡi:

- Mặt trên: z = φ_2(x,y)
- Mặt dưới: z = φ_1(x,y)
- Xung quanh: mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn là biên của miền D thuộc mặt phẳng Oxy. (D là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy).

Khi đó

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

Nếu miền $D = \{(x,y) : a \le x \le b, \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$ thì

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} dy \int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

<u>Ví dụ 1</u>: Cho miền Ω giới hạn bởi các mặt: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + 2z = 2.

Viết tích phân bội 3 $I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ theo các thứ tự :

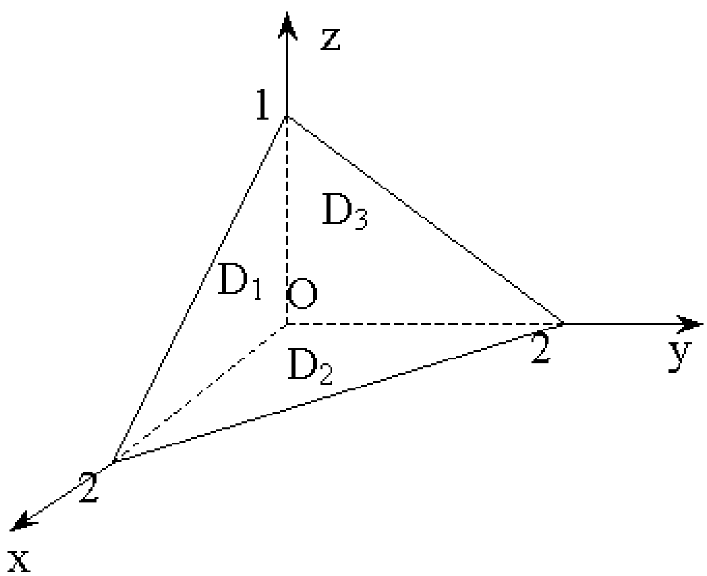
a). dxdydz

b). dxdzdy

c). dydzdx

<u>Giải:</u>

a). Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là miền



$D_1 = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2 - x\}$

Giới hạn trên của Ω: $z = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}$

Giới hạn dưới của Ω: $z = 0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} f(x,y,z)dz$$

b). Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxz là miền

$$D_2 = \left\{(x,z):\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le z \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

Giới hạn trên của Ω: $y = 0 - x - 2z$

Giới hạn dưới của Ω: $y = 0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz \int_0^{2-x-2z} f(x,y,z)dy$$

c). Hình chiếu Ω của xuống mặt phẳng Oyz là

$$D_3 = \left\{(y,z): 0 \le y \le 2; 0 \le z \le 1 - \tfrac{y}{2}\right\}$$

Giới hạn trên của Ω là : x = 2-y-2z

Giới hạn dưới của Ω là : x = 0

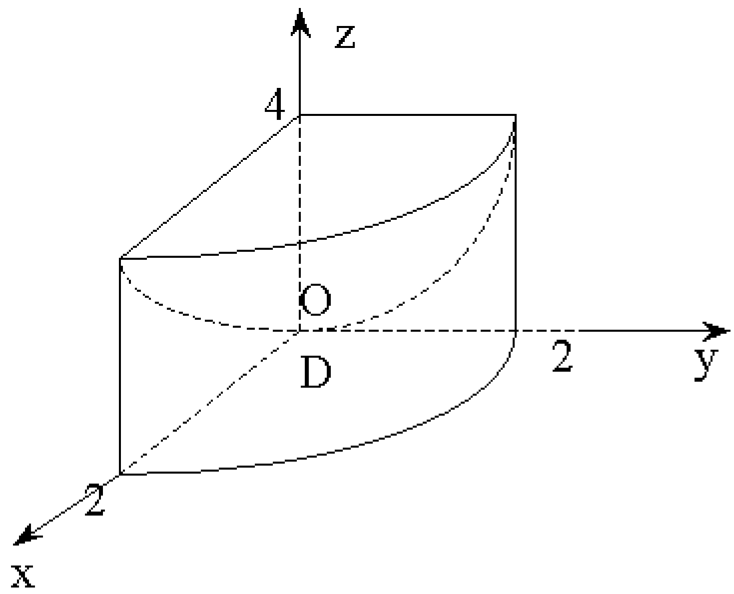
Vậy

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} dz \int_0^{2-y-2z} f(x,y,z)dx$$

<u>Ví dụ 2</u>: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$, Ω là miền giới hạn bởi các mặt:

$z = x^2+y^2$; $z = 4$; $x = 0$; $y = 0$.

<u>Giải:</u>



Hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy là $\frac{1}{4}$ hình tròn :

$$D_4 = \left\{(y,z): 0 \le y \le 2; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$

Mặt trên của Ω: z=4,

Mặt dưới của Ω: $z=x^2+y^2$.

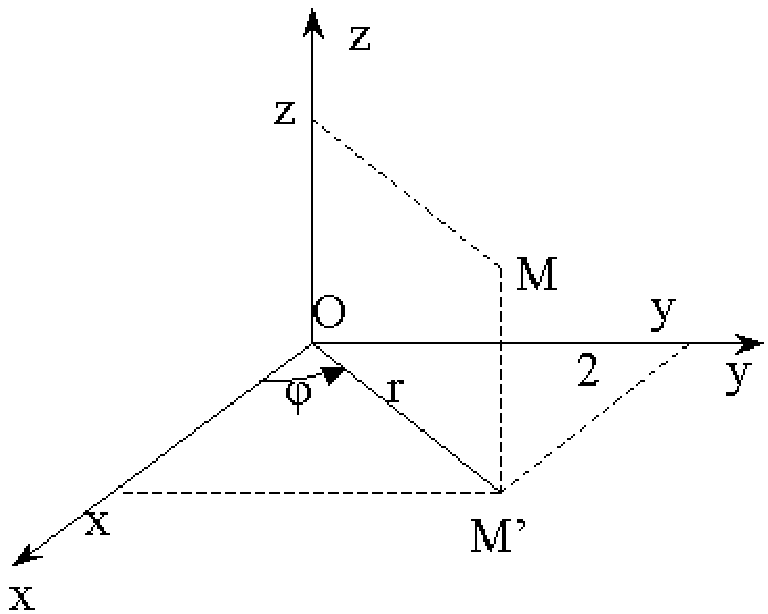
Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^4 x.dz = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x.z \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=4} \right) dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4x - x^3 - xy^2) dy = \int_0^2 (4xy - x^3y - \frac{xy^3}{3}) \Big|_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$I = \frac{2}{3}\int_0^2 x(4-x^2)^{3/2} dx = \frac{64}{15}$$

2. Tính tích phân bội 3 trong hệ toạ độ trụ



Toạ độ trụ của điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r,φ,z), với (r,φ) là toạ độ cực của hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy (Hình vẽ)

Ta luôn có: $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Mối liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ trụ

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

Ta có :

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi, r\sin\varphi, z).rdrd\varphi dz$$

__Ví dụ 3__: Tính $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi $z = x^2+y^2$; $z = 4$

__Giải:__

Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2 \leq 4$

Chuyển sang toạ độ trụ

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$

Ω giới hạn bởi: $o \le \varphi < 2\pi$; $0 \le r \le 2$; $r^2 \le z \le 4$.

Vậy:

$$I = \iiint_\Omega r^2 .r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{r^2}^4 dz = \frac{64\pi}{3}$$

3. Tính tích phân bội 3 trong hệ toạ độ cầu

Toạ độ cầu của một điểm M(x,y,z) là bộ 3 số (r,θ,φ), với r = OM, θ là góc giữa trục Oz và $\overline{OM}$, φ là góc giữa trục Ox và $\overline{OM'}$, với M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Ta có: Với mọi điểm M trong không gian thì $r \ge 0$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$

Mối liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cầu:

$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

Công thức tích phân trong hệ toạ độ cầu

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_\Omega f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

<u>Ví dụ 1</u>: Tính $I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi hai mặt cầu

$x^2+y^2+z^2 = 1$; $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Chuyển sang hệ toạ độ cầu, ta có: $I = \iiint_\Omega r^4 \sin\phi dr d\phi d\varphi$

Miền Ω xác định bởi $1 \le r \le 2$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_1^2 r^4 dr = \frac{124\pi}{5}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le z$.

Chuyển sang hệ toạn độ cầu ta có:

$$I = \iiint_{\Omega} r^3 \sin\phi\, dr d\phi d\varphi$$

Miền Ω xác định bởi $0 \le r \le \cos\theta$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\cos\phi} r^3 \sin\phi\, dr = \frac{\pi}{10}$$

§3 Ứng dụng của tích phân bội

I. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC

1. Tính diện tích hình phẳng

Diện tích của miền D trong mặt phẳng Oxy

$$S(D) = \iint_D dxdy$$

2. Thể tích vật thể

Vật thể Ω trong không gian Oxyz là:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Nếu Ω giới hạn trên bởi mặt $z = f_2(x,y)$, giới hạn dưới bởi mặt $z = f_1(x,y)$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với Oz và có đường chuẩn là biên của miền D trong mặt phẳng Oxy thì

$$V(\Omega) = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\, dxdy$$

Ví dụ 1: Tính thể tích phần hình nón $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4$

Giải:

Gọi Ω là vật thể hình nón $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 4$

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Chuyển sang hệ toạ độ cầu thì

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \phi dr d\phi d\varphi$$

Miền giới hạn bởi $0 \leq r \leq 2$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Vậy

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^2 r^2 \sin \phi dr = \frac{\pi^3}{3}(2 - \sqrt{2})(dvtt)$$

<u>Ví dụ 2</u>: Tính thể tích hình cầu có bán kính R

<u>Giải:</u>

Ta có thể tích hình cầu hình cầu

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Hình cầu Ω: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

Chuyển sang hệ toạ độ cầu thì

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \phi dr d\phi d\varphi$$,

Và miền Ω: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin \theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta . \int_0^R r^2 dr$$

$$= 2\pi.(-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} . \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 (đvtt)$$

II. ỨNG DỤNG CƠ HỌC

1. Tính khối lượng

a. Khối lượng của vật thể Ω có khối lượng riêng tại điểm M(x, y, z) là f(x, y, z) thì:

$$m(\Omega) = \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

b. Nếu bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng là f(x, y) thì :

$$m(\Omega) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

2. Momem quán tính của vật thể Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) đối với

c. trục Ox: $I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

d. trục Oy: $I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

e. trục Oz: $I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

f. đường thẳng L: $I_L = \iiint_\Omega r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$, r(x, y, z) là khoảng cách từ điểm M(x, y, z) đến L

g. Mặt Oxy: $I_{xy} = \iiint_\Omega z^2\rho(x,y,z)dxdydz$

h. Mặt Oxz: $I_{xz} = \iiint_\Omega y^2\rho(x,y,z)dxdydz$

i. Mặt Oyz: $I_{yz} = \iiint_\Omega x^2\rho(x,y,z)dxdydz$

j. Gốc tọa độ: $I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

3. Momen tĩnh của Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) đối với

a) Mặt Oxy: $M_{xy} = \iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz$

b) Mặt Oxz: $M_{xz} = \iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz$

c) Mặt Oyz: $M_{yz} = \iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz$

4. Trọng tâm của Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) là

$$x_o = \frac{M_{yz}}{m(\Omega)}; y_o = \frac{M_{xz}}{m(\Omega)}; z_o = \frac{M_{xy}}{m(\Omega)}.$$

BÀI TẬP

1- Tính $\iiint_\Omega (1-x-y)dxdydz$ với Ω

a) giới hạn bởi $0 \le x \le 1$; $1 \le y \le 2$; $2 \le z \le 3$.

b) giới hạn bởi các mặt: $x + y + z = 1$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2-Tính:

a) $\iiint_\Omega xdxdydz$, Ω: $z = x^2 + y^2$; $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$ (lấy trong miền $x \ge 0$, $y \ge 0$).

b) $\iiint_\Omega ydxdydz$, Ω: $y = x^2$, $y + z = 1$, $z = 0$.

3- Tính:

a) $\iiint_\Omega zdxdydz$, Ω: $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$.

b) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$, Ω: $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

c) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+1)\ dxdydz$, Ω: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

d) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, Ω: góc phần tám thứ nhất của khối cầu đơn vị.

e) $\iiint_\Omega zdxdydz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

f) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2 + z^2)^3 dxdydz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \leq 0$.

4-Tính thể tích vật giới hạn bởi:

a) $z = x^2 + 3y^2$, $z = 8 - x^2 - y^2$

b) $y + z = 2$; $x = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ nằm trong góc phần tám thứ nhất

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

d) $z = 4 - x^2 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

5- Tính momen quán tính đối với các trục Ox, Oy, Oz của khối chữ nhật đồng chất Ω:
$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{c}{2}$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

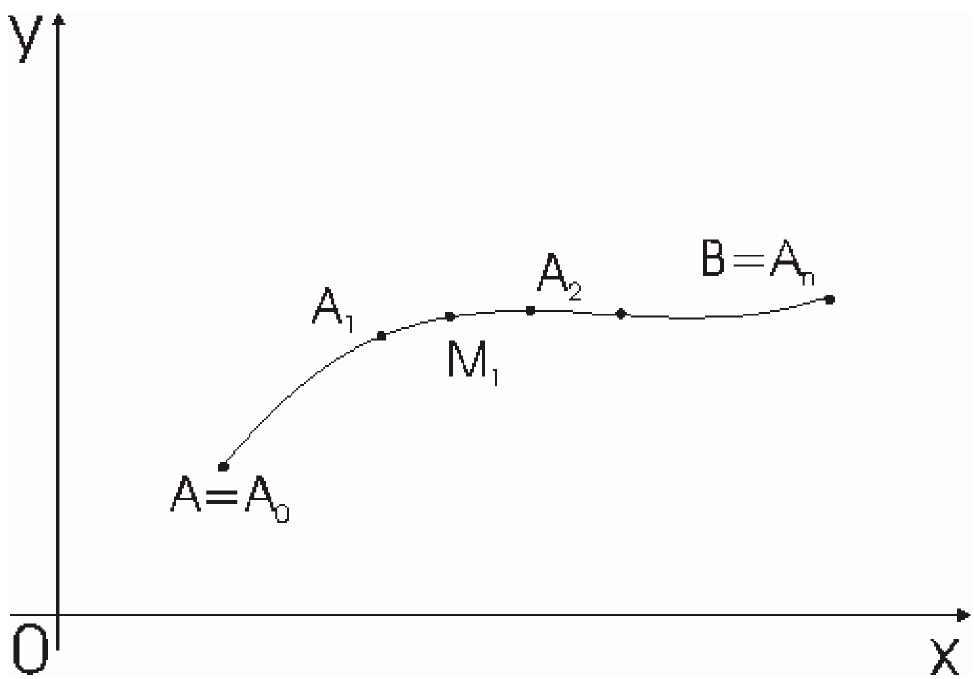
b) Tìm tọa độ trọng tâm của nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$ nếu khối lượng riêng tại mỗi điểm tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ.

CHƯƠNG III: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

I. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

1. Định nghĩa

Cho hàm f(M) xác định trên cung AB. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ th ành n phần tùy ý bởi các điểm A = Ao < A_1 < …… < An = B. Đặt Δli là độ dài cung AiAi$_{-1}$ và trên cung AiAi$_{-1}$ lấy một điểm Mi tùy ý, i = 1, 2 , … , n.



(Hình 1.1)

Lập tổng : $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$

Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi n → ∞ sao cho max{ Δli } → 0 và i không phụ thuộc vào cách chia các cung AiAi$_{-1}$ và cách chọn các Mi, thì I được gọi là tích phân đường loại 1 của f(M) trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và được ký hiệu là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl$$

Vậy:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl = \lim_{n\to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$$

Khi đó ta nói f(M) là khả tích trên cung AB.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ thuộc mặt phẳng xy và f là hàm theo 2 biến f(x,y) thì dùng ký hiệu : $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dl$

Trong không gian xyz, f là hàm f(x,y,z) thì dùng ký hiệu $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl$

Ý nghĩa thực tế:

Xem 1 dây vật chất hình dạng L và có mật độ khối lượng là f(M) phụ thuộc vào điểm M trên dây, thì khối lượng của dây vật chất là :

Tích phân đường loại 1 có nhiều ứng dụng thực tế, được trình bày ở mục I.8

$$M = m(AB) = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl$$

2. Định lý tồn tại

Nếu hàm f(M) liên tục dọc theo cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại 1 tồn tại.

3. Các tính chất

- Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc hướng của cung, nghĩa là: $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(M)\,dl$

- Nếu f, g khả tích trên cung AB và k là hằng số thì kf+g cũng khả tích và : $\int_{\overset{\frown}{AB}} (kf+g)dl = k\int_{\overset{\frown}{AB}} fdl + \int_{\overset{\frown}{AB}} gdl$

- Nếu f khả tích trên AB và C là 1 điểm trên cung AB thì: $\int_{\overset{\frown}{AB}} (M)dl = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(M)dl + \int_{\overset{\frown}{CB}} F(M)dl$

- Nếu f(M) ≥ 0 khả tích trên AB thì : $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl \ge 0$

Nếu f khả tích trên trên AB thì $|f|$ cũng khả tích trên AB

và: $\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl\right| \leq \int_{\overset{\frown}{AB}} |f(M)|dl$

Lưu ý: Nếu cung AB trơn từng khúc (nghĩa là cung AB có thể chia thành 1 số hữu hạn cung trơn) và f(M) liên tục trên cung AB thì định lý tồn tại và các tính chất nêu trên vẫn đúng.

4. Định lý (về giá trị trung bình)

Nếu f(M) liêân tục trên cung trơn AB có độ dài L. Khi đó tồn tại điểm $\overline{M}$ thuộc cung AB thỏa : $\int_{\overset{\frown}{AB}} (kf+g)dl = F(\overline{M}).L$

5. Công thức tính tích phân ường loại 1 trên mặt phẳng

a) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số :

Cho hàm số f(x,y) liên tục trên cung trơn $\overset{\frown}{AB}$, và cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \qquad a \leq t \leq a \end{cases}$$

Chia [a,b] thành n đoạn bởi các điểm:

a = to < t_1< …. < tn = b .

Khi đó cung AB được chia tương ứng thành n cung bởi các điểm Ak(x(tk), y(tk)), k= 0,1,2….,n. Theo định lý giá trị trung bình ta có :

$$\Delta l_k = \int_{k=0}^{t_{k+1}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{t}_k)^2}\,\Delta t_k$$

Lấy điểm giữa Mk(x(tk), y(tk)) thì có tổng tích phân:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{M}_k)\Delta l_k = \sum f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k))\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{t}_k)^2}\,\Delta t_k$$

Vế phải là tổng tích phân xác định, khi qua giới hạn, ta được:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl = \int_a^b f(x(t),\ y(t))\,\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{t}_k)^2}\,dl$$

b) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình: y = y(x), a ≤ x ≤ b :

Khi đó từ công thức trên, ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\,\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

c) Cung AB có phương trình tọa độ cực

$$r = r(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$$
$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \qquad \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}$$

Nếu xem φ là tham số, ta có :

$$x'^2_{\varphi} + y'^2_{\varphi} = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2$$

Vậy :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(u)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'(\varphi)^2}\,dl$$

6. Công thức tính tích phân đường loại 1 trong không gian

Cho hàm số f(x,y, z) liên tục trên cung trơn AB trong không gian. Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số :

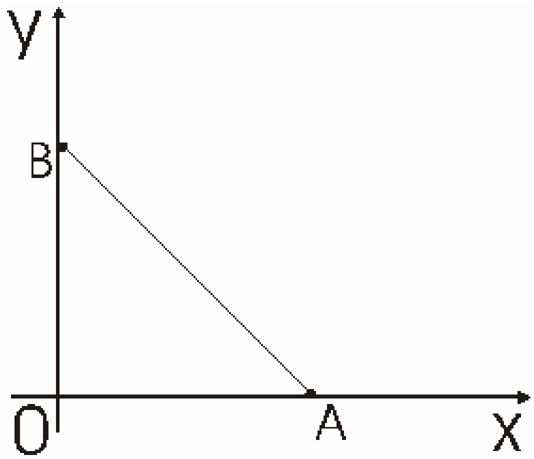
$$x = x(t), y = y(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b$$

Hoàn toàn tương tự như phần I.5.a, ta có:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t),\ y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dl$$

7. Các thí dụ

a) <u>Thí dụ 1:</u> Tính $\int_C f(x+y)\,dl$ Với C là đường các cạnh tam giác có đỉnh O(0,0), A(1,0), B(0,1)



(Hình 1.2)

Ta có : $\int_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$

Trên $\overline{OA}$: y=0, dl = dx nên:

$$\int_{OA}(x+y)\,dl = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Trên $\overline{OB}$: x=0, dl = dy nên:

$$\int_{BO}(x+y)dl = \int_{BO}(x+y)dy = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$$

Trên $\overline{AB}$: y= 1-x

$$\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$$

➔ $$\int_{AB}(x+y)\,dl = \sqrt{2}\int_0^1 dx = \sqrt{2}$$

Vậy : $$\int_C (x+y)dl = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

b) <u>Thí dụ 2:</u> Tính $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ Với C là đường cong có phương trình: $x^2+y^2=ax$

Sử dụng tọa độ cực:

$$\left.\begin{array}{l} x = r(\varphi).\cos\varphi \\ y = r(\varphi).\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

$$\Rightarrow ax = r^2$$

$$\Rightarrow r = a\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Vậy:

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{ax}.\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos\varphi}.\sqrt{a^2}\,d\varphi = a^2\left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2$$

c) <u>Thí dụ 3:</u> Tính $\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2\,dl$ Với cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình: x = acost , y = asint, z= bt , $0 \le t \le 3$

Xem t là tham số, ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2\,dl = \int_0^3 bt^2\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt$$

$$= b^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^3 t^2\,dt = 9b^2\sqrt{a^2+b^2}$$

d) <u>Thí dụ 4:</u>

Tính $\int_L xy\,dl$ với đường L là phần trong góc tọa độ thứ nhất của giao tuyến giữa mặt Paraboloid elliptic có phương trình $z = 2 - x^2 - 2y^2$ và mặt trụ parabolic $z = x^2$ từ điểm (0,1,0) đến (1,0,1)

Dùng tham số t= x , thì ta có :

$$x = t, z = t^2, \ y^2 = \frac{z - t^2 - z}{2} = 1 - t^2$$

Vì L nằm trong góc tọa độ thứ nhất, nên ta được phương trình tham số sau:

$$x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2},\ z = t^2,\quad 0 \le t \le 1$$

Do đó :

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dl$$
$$= \sqrt{1 + \frac{t^2}{1+t^2} + 4t^2}\,dl \quad = \frac{\sqrt{1 + 4t^2 - 4t^4}}{\sqrt{1 - t^2}}\,dl$$

Vậy:

$$\int_L xyds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\ \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{2-(2t^2-1)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{2-u^2}\,du \qquad (u = 2t^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t\sqrt{2-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi + 2}{8}$$

8. Ứng dụng của tích phân đường loại 1

a). Khối lượng 1 cung:

Giả sử cung vật chất chiều dài L có khối lượng riêng phụ thuộc điểm M trên dây cung là δ (M). Khi đó với 1 cung nhỏ A_iA_{i+1}, có :

$$\mathbf{m(A_iA_{i+1}) \approx \delta(M_i)l(A_i + A_{i+1}) = \delta(M_i)\Delta l_i}$$

Vậy: $$m(AB) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta(M_i)\Delta li$$

Qua giới hạn ta được :

$$M = m(AB) > \int_{\widehat{AB}} \delta dl$$

b). Moment tĩnh (moment thu nhất), trọng tâm cung phẳng :

Cho 1 cung phẳng $\widehat{AB}$ thuộc mặt phẳng xy, có khối lượng riêng phụ thuộc điểm M(x,y) trên dây cung là δ (x,y). Theo định nghĩa moment trong cơ học, ta có công thức moment của cung $\overset{\frown}{AB}$ đối với trục Ox là Mx và đối với trục Oy là My là :

$$M_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} y\delta(x,y)dl,\ M_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} x\delta(x,y)dl$$

Từ đó trọng tâm khối lượng của cung AB được xác định bởi:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{M}\int_{AB} y\delta(x,y)dl$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M}\int_{AB} x\delta(x,y)dl$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ là đồng chất, δ (x,y) = hằng số , thì : M= δ .L (L là chiều dài cung AB), và tọa độ trọng tâm sẽ là :

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_{AB} xdl \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_{AB} ydl$$

Cũng nhớ rằng : khi cung $\overset{\frown}{AB}$ không cắt trục Ox và quay quanh trục Ox thì diện tích mặt tròn xoay do cung phẳng đó tạo ra là :

$$S = 2\pi\int_{\overset{\frown}{AB}} ydl$$

Từ công thức toạ độ trọng tâm, có:

$$S = 2\pi\bar{y}L$$
$$\text{hay } \bar{y} = \frac{S}{2\pi L}$$

<u>**Thí dụ 5**</u>: Tìm trọng tâm của nửa trên vòng tròn tâm O bán kính R.

<u>Giải:</u> Xét nửa vòng tròn AB tâm 0. Do tính đối xứng nên trọng tâm (x,y) phải nằm trên trục Oy ($\bar{x} = 0$). Khi nửa vòng tròn AB quay quanh trục Ox ta được quả cầu có diện tích mặt cầu là: S = 4π R^2, và độ dài nửa cung tròn AB là L = π R. Vậy trọng tâm có tung độ là :

$$\bar{y} = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\pi L} = \frac{2R}{\pi}$$

c). Moment tĩnh (moment thứ nhất), trọng tâm cung trong không gian:

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian với khối lượng riêng là δ (x,y,z) thì tương tự trường hợp phẳng ta có khối lượng cung và các moment tĩnh cung AB đối với các mặt tọa độ x0y, x0z, y0z là :

$$M = \int_{\overset{\frown}{AB}} \delta(x,y,z)dl$$

$$M_{xy} = \int_{\overset{\frown}{AB}} z\delta(x,y)dl,\ M_{yz} = \int_{\overset{\frown}{AB}} x\delta(x,y)dl,\ M_{xz} = \int_{\overset{\frown}{AB}} y\delta(x,y)dl$$

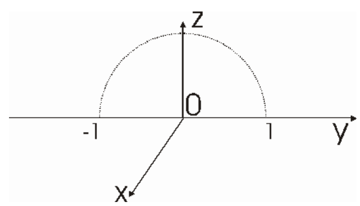
Và trọng tâm khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ có công thức :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M},\quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M},\quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Nếu cung AB đồng chất (δ =hằng số) thì $M = \delta.L$ và :

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_{\overset{\frown}{AB}} xdl,\quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_{\overset{\frown}{AB}} ydl,\quad \bar{z} = \frac{1}{L}\int_{\overset{\frown}{AB}} zdl$$

<u>Thí dụ 6</u>: Cho nửa vòng tròn bằng thép đặt trong mặt phẳng y^0z có phương trình $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. Biết khối lượng riêng là φ (x,y,z) = 2 – z. Hãy tìm khối lượng và trọng tâm của nửa vòng tròn đó.



(Hình 1.3)

Do nửa vòng tròn nằm trong mặt phẳng yz, nên trọng tâm có x= 0. Ngoài ra do đối xứng và có khối lượng phân bố đối xứng đối qua trục Oz nên trọng tâm có y=0. Phương trình tham số của nửa vòng tròn là : x=0 , y = cos t , z = sin t , 0 ≤ t ≤ π

Vậy:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{0^2 + \sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt$$

$$M = \int_C \delta(x,y,z)dl = \int_C \delta(2-z)dl = \int_0 \delta(2-\sin t)dl$$

$$= 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta(x,y,z)dl = \int_C z(2-z)dl = \int_0^\pi \sin t(2-\sin t)dt = \frac{8-\pi}{1}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{4\pi-4}$$

d). Moment quán tính (moment thứ hai)

Ta có công thức moment quán tính cung $\overset{\frown}{AB}$ với khối lượng riêng δ (x,y,z) đối với các trục toạ độ là :

$$I_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)dl$$

$$I_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)dl$$

$$I_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)dl$$

Tổng quát, moment quán tính đối với đường thẳng Δ được tính bởi :

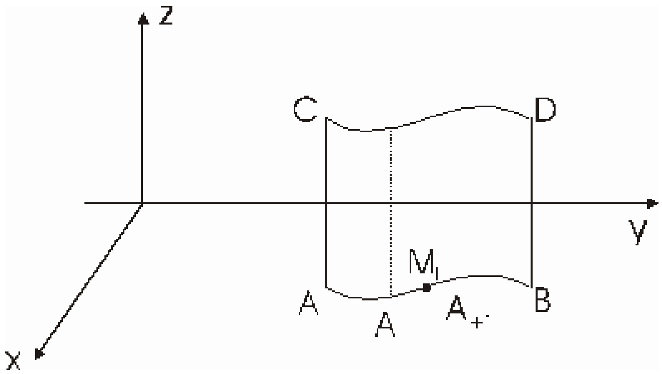
$$I_\Delta = \int_{\overset{\frown}{AB}} r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)dl$$

Với r(x,y,z) : khoảng cách từ điểm M(x,y,z) đến đường thẳng Δ

Khi cung $\overset{\frown}{AB}$ là cung phẳng ta có các khái niệm và công thức tương tự.

e). Diện tích mặt trụ

Cho một cung $\overset{\frown}{CD}$ trong không gian với $z \geq 0$ có hình chiếu vuông góc xuống mặt phẳng x0y là cung $\overset{\frown}{AB}$ Xem mặt trụ với đường sinh song song trục Oz, đường chuẩn CD giới hạn trên cung CD, giới hạn dưới bởi cung AB, giới hạn 2 bên bởi các đường thẳng AC, BD



(Hình 1.4)

Giả sử cung CD có phương trình z = f(M),M$\in$ AB

Chia cung AB thành n phần bởi các điểm A=Ao, A_1, ……, An = B

Khi đó mặt trụ cũng được chia tương ứng thành n mặt trụ nhỏ, và mặt trụ thứ i với đáy là cung $AiAi_{+1}$ có diện tích được tính gần đúng diện tích hình chữ nhật có đáy là $\Delta_i = AiAi_{+1}$ chiều cao f(Mk), với Mk $\in AiAi_{+1}$ là Si = Δ_i x f(Mi).

Khi đó diện tích mặt trụ có diện tích tính gần đúng là:

$$S_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$$

Qua giới hạn, ta có: $S = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl$

<u>Thí dụ 7</u>: Tính diện tích phần mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$ nằm giữa mặt z= 0 và $z = \frac{xy}{2R}$ ở góc x ≥ 0 , y ≥ 0.

<u>Giải:</u> Do mặt trụ giới hạn trên bởi đường cong $z = \frac{xy}{2R}$, giới hạn dưới bởi ¼ vòng tròn $x^2 + y^2 = R^2$ trong mặt phẳng xy, nên nó có phương trình : X= Rcos t, y = Rsin t , 0 ≤ t ≤ π /2

Vậy : $S = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xy}{2R} dl$

Ta có:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\ dt = Rdt$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R.\cos t.R\sin r}{2R} Rdt = \frac{R^2}{4}$$

II. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

1. Định nghĩa tích phân □ường loại hai trong mặt phẳng

Cho 2 hàm P(x,y), Q(x,y) xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thuộc mặt phẳng xy. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ th ành n phần tùy ý bởi các điểm A = Ao < A_1 < …… < An = B, với Ai(xi,yi) Trên mỗi cung $AiAi_{+1}$ lấy một điểm Mi (xi, yi) tùy ý, và i = 1, 2 , … , n và đặt Δxi = x_{i+1} – xi , Δyi = yi_{+1} – yi

Lập tổng : $S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\overline{x_i}, \overline{y_i}).\Delta x_i + Q((\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i\right]$

Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi n → ∞ sao cho max{ Δli } → 0 với Δli là độ dài cung $AiAi_{+1}$ và không phụ thuộc vào cách chia cung đoạn $AiAi_{-1}$ và cách chọn các Mi, thì I được gọi là tích phân đường loại 2 của f(M) trên cung AB và được ký hiệu là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Vậy:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\overline{x_i}, \overline{y_i}).\Delta x_i + Q((\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i\right]$$

2. Định lý

Nếu các hàm P(x,y) , Q(x,y) liên tục trong một miền mở chứa cung AB trơn từng khúc thì tích phân đường loại 2 $\int_{\overset{\frown}{AB}} pdx + 1dy$ luôn tồn tại.

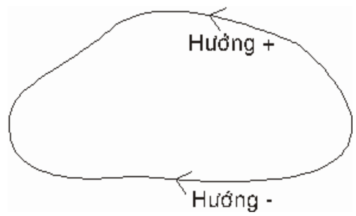
3. Tính chất

a). Do khi đổi hướng cung $\overset{\frown}{AB}$ thành $\overset{\frown}{BA}$ thì trong tổng tích phân các Δxi = x_{i+1} – xi , Δyi = yi_{+1} – yi được thay bằng - Δxi , -Δyi nên tích phân đường loại 2 bị đổi dấu. Ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

Do đó khi đường lấy tích phân là đường cong kín C, ta quy ước hướng dương trên C là hướng mà khi đi dọc trên C thì miền bị chặn bởi C nằm phía bên trái. Hướng ngược lại là hướng âm. Tích phân theo hướng dương được ký hiệu là :

$$\int_C Pdx + Qdy \quad \text{hay} \quad \oint_C Pdx + Qdy$$



(hình 2.1)

b). Nếu P(x,y), Q(x,y) khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$, và cung $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành 2 cung $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ thì P, Q cũng khả tích trên 2 cung đó , và ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} pdx + Qdx = \int_{\overset{\frown}{AC}} pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{CB}} pdx + Qdy$$

4. Công thức tính tích phân đường loại 2 trên mặt phẳng

a). Cung AB có phương trình tham số :

Cho hàm số P(x,y), Q(x,y) liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{AB}$. Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số : x=x(t) , y = y(t) , a≤ t ≤ b, t=a ứng với điểm A và t = b ứng với điểm B.

Từ định nghĩa có thể coi tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} pdx + Qdx$ là tổng của 2 tích phân riêng biệt (giới hạn của 2 tích phân) sau:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta x_i$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta y_i$$

Chia [a,b] thành n đoạn bởi các điểm : a = to < t_1 < …… < tn = b . Khi đó cung AB được chia tương ứng thành n cung bởi các điểm Ak(x(tk), y(tk)), k=0,1,2….,n. Theo định lý Lagrange ta có : $\bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ thỏa:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

Lấy điểm giữa Mk(x(tk), y(tk)) thì có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} p(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i))x'(\bar{t}_i).\Delta t_i$$
$$= \int_a^b p(x(t), y(t)x'(t)dt$$

Tương tự có: $\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)y'(t)dt$

Như vậy công thức tính tích phân đường loại 2 được tính thông qua tích phân xác định:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[p(x(t),y(t))x't + Q(x(t),y(t))y't\right]dt$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình y=y(x), a≤ t ≤ b thì ta có

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[p(x,y(x)) + Q(x,y)y'(x)\right]dx$$

Chú ý : Các công thức trên vẫn đúng khi cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc.

5. Bài toán cơ học dẫn tới tích phân ường loại 2: công do một lực sinh ra trên một cung

Xét bài toán tìm công do lực $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ sinh ra dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Nếu lực $\overline{F}$ không đổi thì công được biết là : $W = \overline{F}.\overline{AB}$

Trong trường hợp tổng quát, chia cung $\overset{\frown}{AB}$ bởi các điểm A = Ao < A_1 < …… < An = B. Trên mỗi cung AiAi_{-1} lấy một điểm Mi $(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ tùy ý, với i = 1, 2 , … , n. Nếu cung AiAi_{+1} khá bé thì có thể xấp xỉ là đoạn thẳng AiAi_{+1} và lực $\overline{F}$ là không đổi xấp xỉ bởi $F^{\to}(M_i)$. Khi đó công sinh ra trên cung A_iA_{i+1} được xấp xỉ bởi $F^{\to}(M_i).\ \overrightarrow{A_iA_{i-1}}$. Khi đó, có: $A_iA_{i+1} = \Delta x_i\ \vec{i} + \Delta y_i.\vec{j}$ và $F(M_i)$. $A_iA_{i-1} = P(x,y)\ \Delta x_i + Q(x,y).\Delta y_i$

Và như vậy công sinh ra trên cung AB được xấp xỉ bởi tổng :

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} P(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta x_i + Q(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i$$

Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta l_i\} \to 0$ với Δl_i là độ dài cung A_iA_{i-1} và không phụ thuộc vào cách chia cung đoạn A_iA_{i-1} và cách chọn các M_i, thì I được gọi là tích phân đường loại 2 của f(M) trên cung AB và được ký hiệu là:

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Vế phải chính là tổng tích phân đường loại 2 của các hàm số P(x,y), Q(x,y) dọc theo cung AB. Qua giới hạn ta được :

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Từ bài toán này tích phân đường loại 2 còn gọi là tích phân công dù rằng còn nhiều bài toán thực tế cũng dẫn tới việc tìm giới hạn và dẫn tới việc tính tích phân đường loại 2.

6. Một số thí dụ tích phân đường loại 2

Thí dụ 1: Tính tích phân đường loại 2 : $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + xydy$ với A(0,0), B(1,1). Cung AB là đường:

a). Đoạn thẳng AB có phương trình $y = x$, $0 \le x \le 1$.

b). Đường Parabol $y = x^2$.

Giải:

a). Với AB : $y = x$, $0 \le x \le 1$ thì :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + xydy = \int_0^1 (x^2 + x^2)dx = \frac{2}{3}$$

-

Thí dụ 2: Tính $\int_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$

Theo đường không cắt đường thẳng x+y =0 , ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{(x+2y)}{(x+y)^2} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

Vậy theo gợi ý trên ta có: $I = \int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}dx + \int_1^2 \frac{ydy}{(y+3)^2} =$

b). Nếu P, Q thoả định lý 1, và nếu tìm được hàm U thỏa dU = Pdx + Qdy thì ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$$

Thật vậy , giả sử cung AB có phương trình : x=x(t), y=y(t), a≤ t ≤ b. Khi ấy ta có:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t)), y(t))x'(t) + Q(x(t)), y(t))y'(t)]\,dt$$
$$= \int_a^b \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = U(b) - U(a) = U(B) - U(A)$$

Thí dụ 3: Tính $I = \int_{(1,2)}^{(3,1)} xdy + ydx$

Ta nhận thấy : xdy + ydx = dxy. Vậy theo nhận xét trên ta có:

$$I = xy\Big|_{(1,2)}^{(3,1)} = 3 - 2 = 1$$

Thí dụ 4: Tính $I = \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

Ta có :

$$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2) = d\ln\sqrt{x^2+y^2}$$